

文章编号:1007-9629(2021)05-0901-07

水泥-石灰石粉浆体絮体生长多重分形特征

肖佳, 韩凯东, 张泽的

(中南大学土木工程学院, 湖南长沙 410075)

摘要:采用多重分形理论描述了水泥-石灰石粉浆体絮体生长的分布特征,探讨了浆体絮体生长特征与多重分形谱特征参数的关系.结果表明:随着颗粒总比表面积(SSA)的增加,絮体间的小空隙与大空隙数目增加,絮体分布变分散,小粒径絮体数目减小,大粒径絮体数目稳定,絮体尺寸减小,整体上延缓了絮体生长,而随着SSA的继续增加,絮体生长呈现相反的结果;水泥-石灰石粉浆体絮体生长具有多重分形特征,谱宽、左谱宽和右谱宽可表征絮体生长的空间分布,且谱宽的准确性更高;谱差与左谱值可描述絮体生长的尺寸分布,且谱差的准确性更高.

关键词:多重分形;絮体生长;谱宽;谱差;最小分维

中图分类号:TU528.01

文献标志码:A

doi:10.3969/j.issn.1007-9629.2021.05.001

Multifractal Characteristics of Floc Growth in Cement-Ground Limestone Pastes

XIAO Jia, HAN Kaidong, ZHANG Zedi

(School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: The distribution characteristics of floc growth in cement-ground limestone pastes were described by multifractal theory. The relationship between characteristics and multifractal characteristics of floc growth was discussed. The results show that with the increase of the total specific surface area(SSA), the number of small and large void increases, the distribution of floc becomes dispersed. Besides, the number of pony-size floc decreases, and the number of large size floc is stable, the size of floc decreases gradually. The floc growth is slowed down as a whole, but the opposite result appears with the continuous increase of SSA. The floc growth of pastes has a multifractal property. The spectral width, left spectral width and right spectral width of multifractal spectrum can characterize the spatial distribution, especially the spectral width. The spectral difference and left spectral value can describe the size distribution, especially the spectral difference.

Key words: multifractal; floc growth; spectral width; spectral difference; minimum dimension

石灰石粉资源储量大、分布广泛,作为水泥混凝土掺和料有环保、节能、利废的重要意义^[1].水泥浆体的絮凝与浆体的流变行为密切相关^[2],颗粒间絮凝-解絮的可逆行为在短时间内决定了浆体的触变性,并导致流变参数随时间变化^[3].学者们通常采用微观参数表征或显微镜观察水泥浆体的絮凝状态,Roussel^[4]通过触变性模型拟合流变参数得到絮凝结构因

子 λ 和絮凝速率 A_{thix} ,Ye等^[5]利用絮体的平均粒径研究了水泥基材料静态屈服应力与絮凝的关系.然而,这些参数都只能反映絮体的平均状态或尺寸分布,絮体的空间分布也会影响其性能.近年来,研究者采用分形理论来描述絮体颗粒的几何特征.在絮体生长过程中,絮体的空间和尺寸分布时刻变化,简单分形维数只能描述絮体生长的平均性和整体性,不能

收稿日期:2020-06-19; 修订日期:2020-07-23

基金项目:中南大学研究生自主探索创新项目

第一作者:肖佳(1964—),女,湖南衡阳人,中南大学教授,博士生导师,博士. E-mail: jiaxiaog2007@163.com

完全揭示絮体分形变化的动力学过程^[5].研究表明,水泥浆体的分形维数与测度有关,这也暗示了絮体生长的多重分形特性^[6].Valentini等^[7]通过水泥浆体的数字图像计算其多重分形谱,定量描述了水化硅酸钙(C-S-H)凝聚.Vahedi等^[8]证明了多重分形谱可以提供絮体的内部结构、空间分布、尺寸分布的信息.Gao等^[6]也指出多重分形在无需任何先验假设的条件下可以描述水泥浆体孔隙结构的大小分布和空间排列.本文观测了水泥-石灰石粉浆体的絮体生长,定量描述了絮体生长的分布特征,并研究了其絮体生长特征与多重分形谱特征参数的关系.

1 试验

1.1 原材料及配合比

水泥(C)采用P·I 42.5拉法基瑞安基准水泥,比表面积为 $347 \text{ m}^2/\text{kg}$;石灰石粉(L)产自湖北荆门, CaCO_3 含量¹⁾为99%,比表面积分别为411、608、807、 $1\ 007 \text{ m}^2/\text{kg}$,依次记为L I、L II、L III、L IV;拌和水(W)为自来水.水泥-石灰石粉浆体的水胶比为0.4,其配合比见表1.

水泥-石灰石粉颗粒总比表面积(SSA)计算公式见式(1)^[9],计算结果见表1.

$$\text{SSA} = s_c \varphi_c + s_l \varphi_l \quad (1)$$

式中: s_c 、 s_l 分别表示水泥、石灰石粉颗粒的比表面积; φ_c 、 φ_l 分别表示水泥、石灰石粉颗粒占固体总颗粒的体积分数.

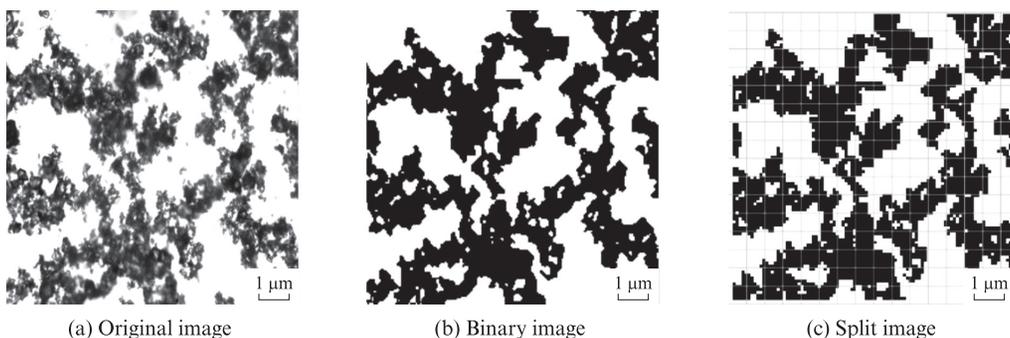


图1 水泥浆体的絮体图像
Fig. 1 Floc image of cement paste

2 结果与讨论

2.1 水泥-石灰石粉浆体的絮体生长特征

表2为水泥-石灰石粉浆体絮体面积占比(ξ)

表1 水泥-石灰石粉浆体配合比与颗粒总比表面积
Table 1 Mix proportions and total specific surface area of cement-ground limestone pastes

Sample	Mix proportion/g			SSA/($\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$)
	C	L	W	
C0	400	0	160	347.00
CL I 20	320	80	160	362.77
CL I 30	280	120	160	370.09
CL II 20	320	80	160	407.56
CL II 30	280	120	160	436.27
CL III 20	320	80	160	453.16
CL III 30	280	120	160	503.58
CL IV 20	320	80	160	498.80
CL IV 30	280	120	160	570.99

1.2 试验方法

按表1配合比制备水泥-石灰石粉浆体:先将浆体慢搅60 s,静置30 s,接着快搅120 s,再慢搅60 s,静置90 s,然后慢搅14 min.从水泥水化的第6 min开始,每隔2 min用针状工具取1个针尖大小的浆体,放在载玻片上,用滴管取1滴无水乙醇滴在浆体上,再放上盖玻片,放在显微图像分析仪下进行观察,调整光学显微镜的粗调和微调焦距,直到所观察到的浆体图像清晰,再调整载物台的位置,找到3个合适位置的图像留存^[3,10].每个试样采集 $100 \text{ 像素} \times 100 \text{ 像素}$ 的图像约30幅(见图1(a));对图像进行二值化处理,并用黑色表示絮体区域,接着进行边界滤波和面积滤波,去除面积过小且不影响测试结果的黑色部分(见图1(b));最后选取合适的絮体图像进行分割处理(见图1(c)).

与絮体面积平均占比($\bar{\xi}$), $\bar{\xi}$ 表征絮体生长的平均尺寸分布状态.由表2可见,随着水化的进行,浆体的絮体面积占比逐渐增大,絮体的尺寸增大.

为探究石灰石粉对水泥浆体絮体生长空间分布

1)文中涉及的含量、水胶比等除特殊说明外均为质量分数或质量比.

表2 水泥-石灰石粉浆体的絮体面积占比与絮体面积平均占比
Table 2 ξ and $\bar{\xi}$ of cement-ground limestone pastes

Sample	$\xi/\%$								$\bar{\xi}/\%$
	6 min	8 min	10 min	12 min	14 min	16 min	18 min	20 min	
C0	44.36	60.96	66.93	67.57	66.03	71.45	72.80	79.10	66.15
CL I 20	43.87	60.09	65.65	66.81	66.44	68.21	71.28	78.12	65.06
CL I 30	36.05	51.10	54.45	64.92	65.59	68.01	70.89	74.09	60.64
CL II 20	33.96	54.06	50.04	64.92	64.37	67.49	70.12	74.43	59.92
CL II 30	30.62	47.42	46.05	54.39	59.02	64.54	61.52	70.64	54.28
CL III 20	36.05	49.98	66.03	59.94	64.53	69.78	73.25	77.49	62.13
CL III 30	58.24	57.18	64.81	74.55	72.14	74.75	74.59	82.33	69.82
CL IV 20	48.21	49.92	69.15	67.08	69.04	72.41	73.84	80.20	66.23
CL IV 30	61.92	65.22	67.22	76.72	76.22	75.11	77.12	84.99	73.07

的影响,将絮体图像用无穷个大小相等的小方格覆盖(即小方格的边长要无限小),计算每1个小方格中絮体所占像素.若每1个小方格中絮体的像素值均接近于平均值(标准差越小),絮体分布越均匀,反之,絮体分布越分散.絮体分布标准差 σ 计算如式(2)所示.

$$\sigma = p^2 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\frac{\xi_i}{\bar{\xi}} - \frac{1}{n})^2}{n-1}} \quad (2)$$

式中: p 为絮体图像像素,取 $p=100$; n 为小方格个数,取 $n=256$; ξ_i 为第 i 个小方格絮体面积占比.

表3为水泥-石灰石粉浆体絮体分布标准差(σ)与絮体分布平均标准差($\bar{\sigma}$), $\bar{\sigma}$ 表征絮体生长的平均空间分布状态.由表3可见,随着水化的进行,水泥-石灰石粉浆体絮体分布标准差逐渐减小,表明其空间分布越来越均匀.

表3 水泥-石灰石粉浆体絮体分布标准差与平均标准差
Table 3 σ and $\bar{\sigma}$ of cement-ground limestone pastes

Sample	σ								$\bar{\sigma}$
	6 min	8 min	10 min	12 min	14 min	16 min	18 min	20 min	
C0	24.66	15.46	13.76	13.54	13.80	12.17	11.74	10.21	14.42
CL I 20	18.84	14.13	14.42	12.37	14.07	13.44	10.18	9.21	14.33
CL I 30	25.37	23.23	16.68	15.12	13.65	14.35	11.07	11.34	16.35
CL II 20	31.79	15.55	20.57	15.12	14.71	13.17	12.90	11.75	16.94
CL II 30	34.95	16.30	22.31	21.24	14.49	14.26	16.62	13.54	19.21
CL III 20	25.37	22.21	15.13	17.06	13.08	12.09	11.41	11.04	15.92
CL III 30	13.78	20.19	12.64	11.15	13.89	9.29	12.49	7.78	12.65
CL IV 20	17.13	19.43	11.98	12.60	13.37	13.36	11.41	7.54	13.35
CL IV 30	15.25	13.52	11.98	9.45	9.43	9.54	11.04	7.27	10.93

由表1~3可见:随着颗粒总比表面积的增加,絮体面积平均占比先减小后增加,分布平均标准差先增加后减小.由此可见,当颗粒总比表面积SSA增加时,絮体生长尺寸减小,分布变分散,而随着SSA的继续增加,絮体将有更好的尺寸和空间分布.

2.2 水泥-石灰石粉浆体絮体生长的多重分形特征

多重分形包括2种关系^[11]:(1)各盒子(用 i 编号)内物理量的概率 $P_i(\epsilon)$ 与测度 ϵ 之间为幂函数关系 $P_i(\epsilon) \sim \epsilon^\alpha$, α 为奇异性指数;(2)盒子数 $N(\epsilon)$ 与测度 ϵ 之间为幂函数关系 $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-f(\alpha)}$, $f(\alpha)$ 为多重分形谱函数.假设絮体图像边长为1,将图像用尺寸为 $\epsilon \times \epsilon$ ($\epsilon =$

$1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64$)的网格覆盖. q 为权重因子,表示各概率子集在配分函数中的贡献,理论上, $q(-\infty < q < \infty)$ 的范围越大精度越高,但随着 q 的增大,计算工作量将成倍增加,而且当其越过一定范围时,再增大对计算结果已无显著影响.当 q 值每增加1时,谱宽($\Delta\alpha$)的变化率小于0.2%,因此可将此时 q 作为取值.本文中,以水泥浆体为例:当 $q=30$ 时, $\Delta\alpha$ 的变化率为0.176%(<0.2%);当 $q=40$ 时, $\Delta\alpha$ 的变化率为0.093%(<0.1%).为了保证更高的准确率,本文选取 q 的取值范围为 $-40 < q < 40$.概率 $P_i(\epsilon)$ 为各盒子中研究目标所占像素($S_i(\epsilon)$)与图像

中研究目标所占总像素之比,计算公式见式(3).采用统计矩阵的方法,对 $P_i(\epsilon)$ 进行统计划分,则可得到絮体分布的配分函数 $I_q(\epsilon)$ (见式(4)),对式(4)两边取对数得到质量指数 $\tau(q)$ (见式(5)).

$$P_i(\epsilon) = \frac{S_i(\epsilon)}{\sum S_i(\epsilon)} \tag{3}$$

$$I_q(\epsilon) = \sum [p_i(\epsilon)]^q = \epsilon^{\tau(q)} \tag{4}$$

$$\tau(q) = \frac{\ln I_q(\epsilon)}{\ln \epsilon} \tag{5}$$

若对于不同的 q 值, $\ln I_q(\epsilon)$ 与 $\ln \epsilon$ 都有良好的线性相关性,说明絮体具有标度不变性,在此基础上,若 $\tau(q)$ - q 曲线呈上凸形,说明絮体具有多重分形特征.水泥浆体的多重分形特征见图2.由图2可见: $\ln I_q(\epsilon)$ 与 $\ln \epsilon$ 呈线性关系,尤其对于阶次较高的部分($q > 0$),表现出非常严格的线性特征,结合 $\tau(q)$ - q 曲线呈上凸形,证明了水泥浆体絮体生长具备多重分形特征.

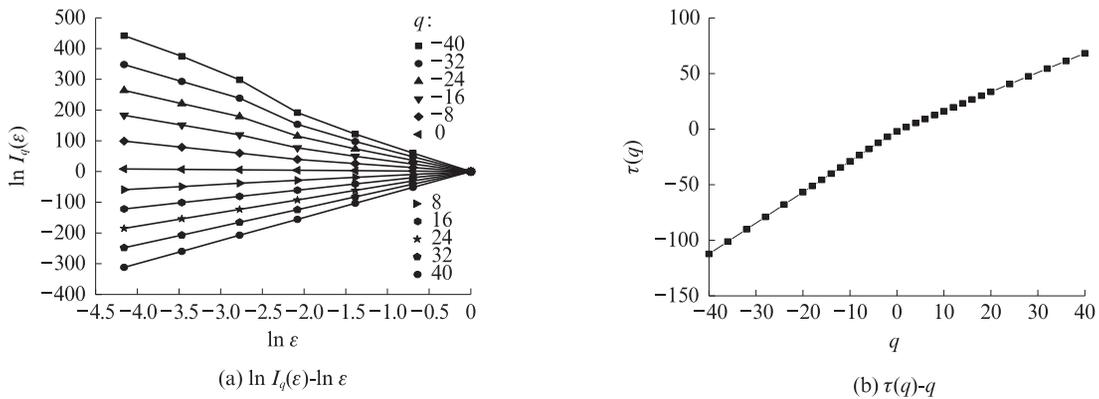


图2 水泥浆体的多重分形特征
Fig. 2 Multifractal characteristics of cement paste

多重分形理论包括3个重要的组成部分:广义分形维数 D_q 、奇异性指数 α 以及多重分形谱函数 $f(\alpha)$,计算公式见式(6)~(8).

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} \tag{6}$$

$$\tau(q) = \alpha q - f(\alpha) \tag{7}$$

$$\alpha = \frac{d\tau(q)}{dq} \tag{8}$$

水泥-石灰石粉浆体絮体生长的多重分形特征见图3.由图3可见:水泥-石灰石粉浆体絮体生长的广义分形维数 D_q 为反“S”递减函数曲线, D_q 随着 q 增大而减小,曲线在 $q=0$ 处出现向另一方向弯折的趋势;当 $q < 0$ 时, D_q 随颗粒总比表面积的增加先增后减,而在 $q > 0$ 时会出现相反的结果;絮体生长的多重分形谱均为左钩状,且随着颗粒总比表面积的增加,多重分形谱先向右发展,然后向左发展.

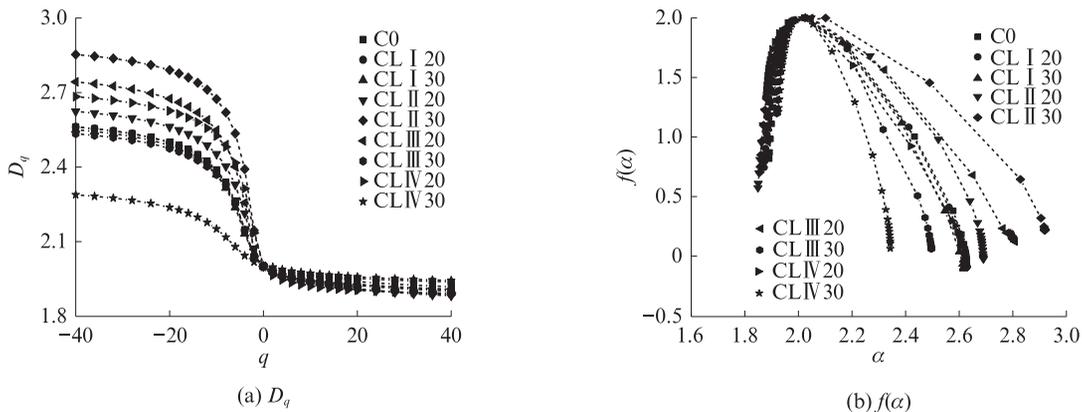


图3 水泥-石灰石粉浆体絮体生长的多重分形特征
Fig. 3 Multifractal characteristics of flocs growth in cement-ground limestone pastes

多重分形谱中:谱宽 $\Delta\alpha$ 可描述絮体的局部特征,代表着絮体的空间分布情况, $\Delta\alpha$ 越大,絮体分布

越不均匀;左谱宽 $\Delta\alpha_L$ 反映了絮体中大空隙的数目;右谱宽 $\Delta\alpha_R$ 反映了絮体中小空隙的数目;谱差 Δf 反映

多重分形谱的不对称性,代表着絮体的尺寸分布情况, $\Delta f < 0$ 时,多重分形谱曲线呈现左钩状,反之多重分形谱曲线呈现右钩状;右谱值 $f(\alpha_{\max})$ 反映小概率对象即大粒径絮体的数量(α_{\max} 为奇异性指数的最大值);左谱值 $f(\alpha_{\min})$ 反映大概率对象即小粒径絮体的数量(α_{\min} 为奇异性指数的最小值).将 $\Delta\alpha$ 、 $\Delta\alpha_L$ 、 $\Delta\alpha_R$ 称为絮体的空间分布参数, Δf 、 $f(\alpha_{\max})$ 、 $f(\alpha_{\min})$ 称为絮体的尺寸分布参数.最小分形维数 D_{\min} 与使 $f(\alpha)$ 达到最大的奇异性指数 α_0 一起反映了最或然子集的性质,即反映了絮体的整体几何特征,称为絮体的整体状态参数.

$\Delta\alpha$ 、 $\Delta\alpha_L$ 、 $\Delta\alpha_R$ 、 Δf 计算公式见式(9)~(12).

$$\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min} \quad (9)$$

$$\Delta\alpha_L = \alpha_0 - \alpha_{\min} \quad (10)$$

$$\Delta\alpha_R = \alpha_{\max} - \alpha_0 \quad (11)$$

$$\Delta f = f(\alpha_{\max}) - f(\alpha_{\min}) \quad (12)$$

图4为水泥-石灰石粉颗粒总比表面积对絮体生长的空间分布、尺寸分布和整体状态参数的影响.由图4可见:当颗粒总比表面积SSA增加时, $\Delta\alpha$ 、 $\Delta\alpha_L$ 、 $\Delta\alpha_R$ 增加,表明絮体间的小空隙与大空隙数目增加,絮体分布变得分散,但随着SSA的继续增加,絮体生长的空间分布出现相反的结果; $f(\alpha_{\min})$ 先减小后增

大,即小粒径的絮体数目先减小后增大, $f(\alpha_{\max})$ 大致保持不变,即大粒径的絮体数目基本稳定, Δf 先增大后减小,即絮体的尺寸先减小后增大; D_{\min} 先减小后增大, α_0 先增大后减小,延缓絮体生长,而随着SSA的继续增加将促进絮体生长.

2.3 水泥-石灰石粉浆体的絮体生长特征的多重分形表征

结合表2、3与图4可知,絮体面积平均占比 $\bar{\xi}$ 与 $f(\alpha_{\min})$ 正相关,与 Δf 负相关,即絮体生长的尺寸平均分布状态可以用 $f(\alpha_{\min})$ 与 $-\Delta f$ 来描述;絮体分布平均标准差 $\bar{\sigma}$ 与 $\Delta\alpha$ 、 $\Delta\alpha_L$ 、 $\Delta\alpha_R$ 正相关,即絮体生长的平均空间分布状态可以用 $-\Delta\alpha$ 、 $-\Delta\alpha_L$ 、 $-\Delta\alpha_R$ 来表征.由于絮体面积平均占比和絮体分布平均标准差可以描述絮体生长特征,称之为絮体生长特征参数;絮体生长的空间分布参数、尺寸分布参数和整体状态参数可以表征絮体生长的多重分形特征称之为多重分形谱参数.将絮体生长特征参数及多重分形谱参数进行归一化处理(处理后的数据以下标n表示),其计算公式为:

$$x_n = \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (13)$$

式中: x_i 、 x_n 为第*i*个归一化前、后的数据; x_{\min} 、 x_{\max} 为

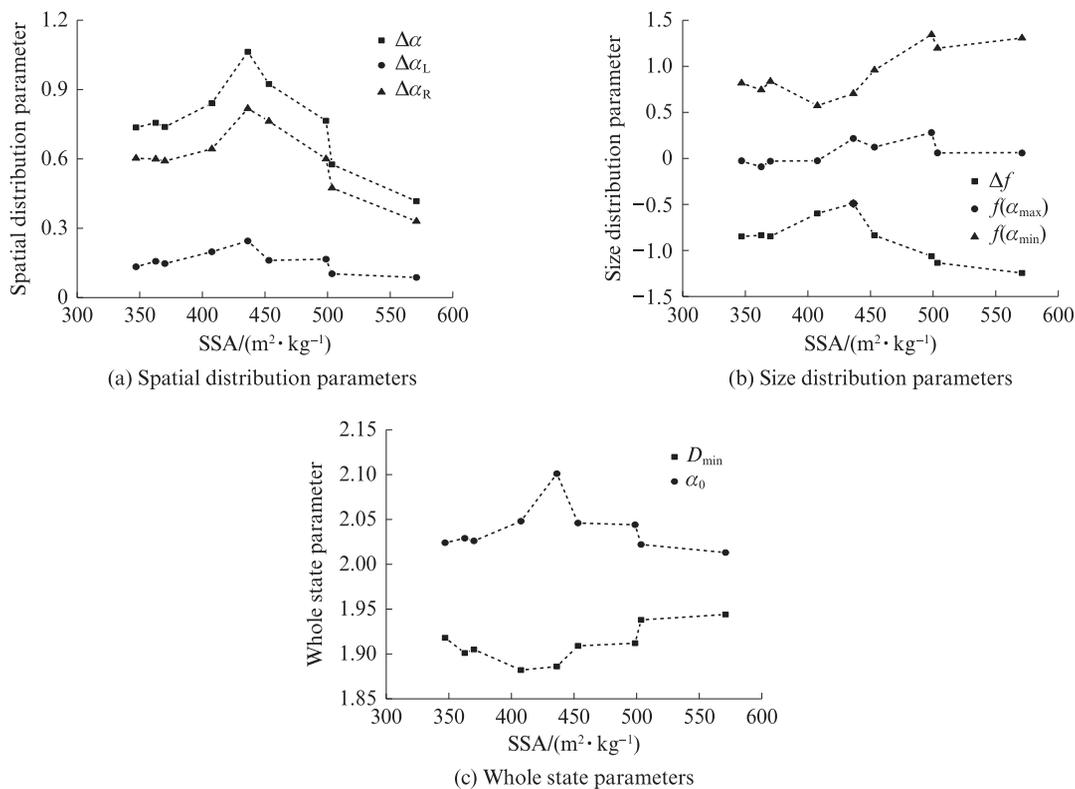


图4 水泥-石灰石粉颗粒总比表面积对絮体生长的空间分布、尺寸分布和整体状态参数的影响

Fig. 4 Effect of total specific surface area of cement-ground limestone on spatial distribution, size distribution and whole state parameters

原始的最小值和最大值.

表4为归一化的絮体生长特征参数及多重分形谱参数,采用BP神经网络对表4数据进行训练,以絮体生长特征参数为输入,多重分形谱参数为输出,建立水泥-石灰石粉浆体絮体生长特征参数及多重分形谱特征参数的关系.通过计算归一化后的絮体生长特征参数及多重分形谱特征参数的标准差 σ' ,对其进行关联度分析,得到絮体生长尺寸分布 $\bar{\xi}_n$ 与 $f(\alpha_{\min})_n$ 、 $-\Delta f_n$ 的关系见图5,絮体生长空间分布 $-\bar{\sigma}_n$ 与 $-\Delta\alpha_{Ln}$ 、 $-\Delta\alpha_{Rn}$ 、 $-\Delta\alpha_n$ 的关系见图6.由图5可见, $-\Delta f_n$ 的标准差小于 $f(\alpha_{\min})_n$, Δf_n 可以更好地描述絮体生长的尺寸分布,且与絮体生长的尺寸分布负相关.由图6可见, $-\Delta\alpha_n$ 的标准差最小, $-\Delta\alpha_{Ln}$ 居中, $-\Delta\alpha_{Rn}$ 最大, $\Delta\alpha_n$ 可以更好地描述絮体生长的空间分布,且与絮体生长空间分布负相关.

综上,多重分形理论能有效、准确地表征水泥-石灰石粉浆体絮体生长特征,清晰地分析絮体的分布情况, $\Delta\alpha$ 、 $\Delta\alpha_L$ 、 $\Delta\alpha_R$ 可以用来表征絮体生长的空间

表4 归一化后的絮体生长特征参数及多重分形谱参数
Table 4 Characteristic parameters of floc growth and multifractal spectrum after normalization

Sample	$-\bar{\sigma}_n$	$-\Delta\alpha_{Ln}$	$-\Delta\alpha_{Rn}$	$-\Delta\alpha_n$	$\bar{\xi}_n$	$f(\alpha_{\min})_n$	$-\Delta f_n$
C0	0.632	0.709	0.441	0.506	0.579	0.178	0.474
CL I 20	0.574	0.557	0.449	0.475	0.589	0.063	0.457
CL I 30	0.338	0.620	0.465	0.503	0.345	0.208	0.473
CL II 20	0.300	0.297	0.359	0.344	0.274	0.205	0.143
CL II 30	0	0	0	0	0	0	0
CL III 20	0.418	0.532	0.113	0.315	0.397	0.398	0.458
CL III 30	0.827	0.899	0.705	0.754	0.792	0.770	0.854
CL IV 20	0.636	0.500	0.447	0.461	0.708	1.000	0.759
CL IV 30	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.942	1.000

分布,且谱宽 $\Delta\alpha$ 的准确性更高, $f(\alpha_{\min})$ 与 Δf 可用于描述絮体生长的尺寸分布,且谱差 Δf 的准确性更高.

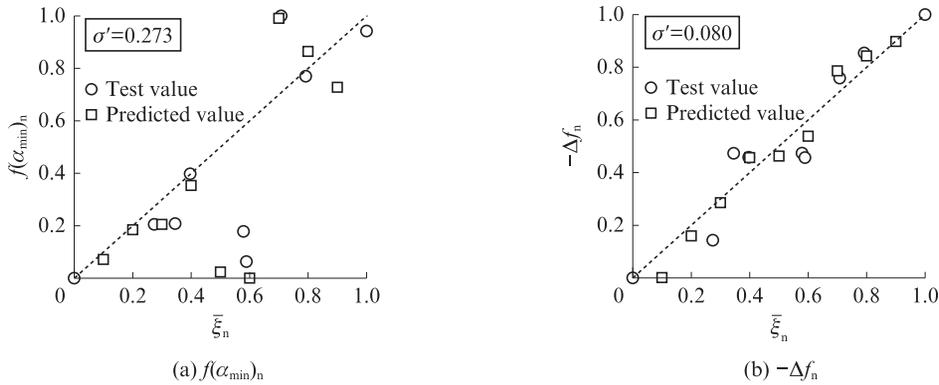


图5 絮体生长尺寸分布 $\bar{\xi}_n$ 与 $f(\alpha_{\min})_n$ 、 $-\Delta f_n$ 的关系

Fig. 5 Relationship between size distribution of floc growth $\bar{\xi}_n$ and $f(\alpha_{\min})_n$ and $(-\Delta f_n)$

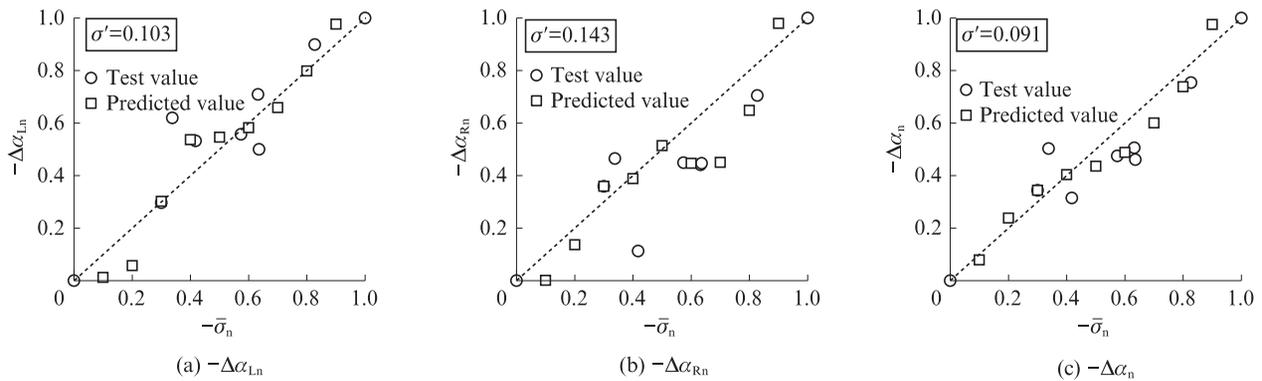


图6 絮体生长空间分布 $-\bar{\sigma}_n$ 与 $-\Delta\alpha_{Ln}$ 、 $-\Delta\alpha_{Rn}$ 、 $-\Delta\alpha_n$ 的关系

Fig. 6 Relationship between spatial distribution of floc growth $-\bar{\sigma}_n$ and $-\Delta\alpha_{Ln}$ 、 $-\Delta\alpha_{Rn}$ 、 $-\Delta\alpha_n$

3 结论

(1)当颗粒总比表面积增加时,水泥-石灰石粉浆体的絮体面积平均占比先减小后增加,絮体分布平均标准差先增加后减小.

(2)当颗粒总比表面积(SSA)增加时,絮体间的小空隙与大空隙数目均增加,絮体分布变得分散,小粒径的絮体数目减小,大粒径的絮体数目基本稳定,絮体的尺寸减小,整体上延缓了絮体生长,而随着SSA的继续增加,絮体生长将呈现相反的结果.

(3)水泥-石灰石粉浆体的絮体生长具备多重分形特征.多重分形谱的谱宽、左谱宽和右谱宽可以用来表征絮体生长的空间分布,且谱宽更为准确,与絮体生长的空间分布负相关.谱差与左谱值可用于描述絮体生长的尺寸分布,且谱差更为准确,与絮体生长的尺寸分布负相关.

参考文献:

- [1] KNOP Y, PELED A, COHEN R. Influences of limestone particle size distributions and contents on blended cement properties [J]. *Construction and Building Materials*, 2014, 71: 26-34.
- [2] YIM H J, KIM J H, SHAH S P. Cement particle flocculation and breakage monitoring under Couette flow [J]. *Cement and Concrete Research*, 2013, 53:36-43.
- [3] YE H, GAO X J, ZHANG L C, et al. Influence of time-dependent rheological properties on distinct-layer casting of self-compacting concrete [J]. *Construction and Building Materials*, 2019, 199:214-224.
- [4] ROUSSEL N. A thixotropy model for fresh fluid concretes: Theory, validation and applications [J]. *Cement and Concrete Research*, 2006, 36(10):1797-1806.
- [5] BROWN G, MICHON G, PEYRIERE J. On the multifractal analysis of measures [J]. *Journal of Statistical Physics*, 1992, 66(3-4):775-790.
- [6] GAO Y, JIANG J Y, SCHUTTER G D, et al. Fractal and multifractal analysis on pore structure in cement paste [J]. *Construction and Building Materials*, 2014, 69:253-261.
- [7] VALENTINI L, ARTIOLI G, et al. Multifractal analysis of calcium silicate hydrate (C-S-H) mapped by X-ray diffraction microtomography [J]. *Journal of the American Ceramic Society*, 2012, 95(8): 2647-2652.
- [8] VAHEDI A, GORCZYCA B. Settling velocities of multifractal flocs formed in chemical coagulation process [J]. *Water Research*, 2014, 53:322-328.
- [9] SHANAHAN N, TRAN V, WILLIAMS A, et al. Effect of SCM combinations on paste rheology and its relationship to particle characteristics of the mixture [J]. *Construction and Building Materials*, 2016, 123:745-753.
- [10] ZHANG Y R, KONG X M, GAO L, et al. Characterization of the mesostructural organization of cement particles in fresh cement paste [J]. *Construction and Building Materials*, 2016, 124: 1038-1050.
- [11] CHHABRA A, JENSEN R V. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum [J]. *Physical Review Letters*, 2001, 63(8):605-616.